

# 二维频率估计的多阶段分解算法\*

周 祎 冯大政 刘建强

西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室, 西安 710071

**摘要** 研究了加性白 Gauss 噪声中的二维频率估计问题. 基于旋转不变性和矩阵伪逆的双正交性, 提出了一种新颖的迭代算法, 它在每一步迭代过程中得到一个二维频率分量. 通过系统化的多阶段分解和重构可以得到所有的二维频率分量, 并且所得的二维频率自动配对. 同时利用循环最小化的思想研究了算法的全局收敛性. 仿真实验表明了所给算法的有效性和优越性.

**关键词** 二维频率估计 旋转不变性 双正交性 多阶段分解 多阶段重构

二维频率估计是多维信号处理中的一个重要的问题<sup>[1-7]</sup>, 它在许多领域(如雷达成像、声纳、通信、地球物理、射电天文学和医学成像等)中有广泛的应用. 基于最大似然思想的方法<sup>[1]</sup>, 虽然有优异的统计性能, 但是它们庞大的计算量限制了它们的实际应用. 因而, 许多具有较小计算量且性能损失较小的次最优方法, 如子空间方法(ACMP 方法<sup>[3]</sup>, 状态空间方法<sup>[4]</sup>, MEMP 方法<sup>[5]</sup>, 2-D Prony 方法<sup>[6]</sup>和 2-D ESPRIT 方法<sup>[7]</sup>等), 被深入地研究了.

对于一维频率估计问题, 经典的 ESPRIT 方法<sup>[2]</sup>利用低秩信号子空间的旋转不变结构可以得到高分辨的频率估计. 对于二维频率估计问题, 也存在类似的低秩信号子空间结构. Rao 和 Kung<sup>[4]</sup>最先认识到这一事实, 然而他们的状态空间方法不能解决多个二维频率具有同一个一维频率分量的问题, 同时也未解决频率配对问题. 利用矩阵增强和矩阵束(MEMP)方法, 文献[5]解决了上述两个问题. MEMP 方法先把二维估计问题分解成两个一维估计问题, 然后将两个一维参数配对即可得到二维频率. 然而, 若多个频率对具有相同的一维频率, 文献[5]中的代价函数可能会配对错误. 文献[6]提出了一种与 MEMP 方法类似的方法, 即 2-D Prony 方法, 它的计算量小于

MEMP 方法, 但是通常其估计性能也要低于 MEMP 方法. 代数耦合矩阵束(ACMP)方法<sup>[3]</sup>可以估计具有相同一维分量的多个二维频率, 它不需要额外的频率配对算法且估计性能也高于 MEMP 方法. 近来, Rouquette 和 Najim<sup>[7]</sup>提出了一种 2-D ESPRIT 型方法, 它需要矩阵的联合对角化来估计频率对以及参数配对算法.

最近, 文献[8, 9]引入了矩阵的双正交性, 提出了一种联合近似对角化一组特征矩阵的多阶段分解算法, 并利用该算法解决了信号盲分离问题. 在本文中, 基于矩阵的双正交性和旋转不变性, 我们进一步推广了多阶段分解算法并用来解决二维频率估计问题, 该方法能够实现频率的自动配对. 文献[9]中的方法是本文算法的一个特例. 同时, 利用循环最小化的思想, 我们研究了该算法的全局收敛性. 计算机仿真结果验证了所给算法的有效性.

## 1 数据模型

考虑如下的被噪声污染的数据:

$$y(m, n) = x(m, n) + w(m, n), \quad (1)$$

其中  $0 \leq m \leq M-1$ ,  $0 \leq n \leq N-1$ , 信号部分  $x(m, n)$

2005-05-20 收稿, 2005-08-08 收修改稿

\* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 60372049)

E-mail: yzhou@mail.xidian.edu.cn

可以表示为

$$x(m, n) = \sum_{k=1}^K s_k \exp[j2\pi(f_{1k}m + f_{2k}n)], \quad (2)$$

信号  $x$  由  $K$  个二维复谐波组成, 它们的归一化二维频率为  $\{f_{1k}, f_{2k}\}$ , 复振幅为  $\{s_k\}$ .  $w(m, n)$  为一个

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \exp(j2\pi f_{11}) & \exp(j2\pi f_{12}) & \cdots & \exp(j2\pi f_{1K}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j2\pi(M-1)f_{11}) & \exp(j2\pi(M-1)f_{12}) & \cdots & \exp(j2\pi(M-1)f_{1K}) \end{bmatrix},$$

$$A = \text{diag}[s_1, s_2, \dots, s_K],$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \exp(j2\pi f_{21}) & \exp(j2\pi f_{22}) & \cdots & \exp(j2\pi f_{2K}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j2\pi(N-1)f_{21}) & \exp(j2\pi(N-1)f_{22}) & \cdots & \exp(j2\pi(N-1)f_{2K}) \end{bmatrix}.$$

我们的目的就是从小被噪声污染的数据  $y(m, n)$  中估计  $K$  个二维频率  $\{f_{1k}, f_{2k}\}$ . 一旦得到二维频率的估计, 复振幅  $\{s_k\}$  可以直接估计出, 这是因为  $y(m, n)$  是复振幅的线性组合. 因而, 本文不考虑振幅  $s_k$  的估计. 不失一般性, 我们假设二维频率在每一维的值互有不同. 而关于估计多个二维频率在某一维共享相同频率值的问题, 可以利用与 ACMP 方法类似的秩恢复技巧来处理.

## 2 多阶段分解和重构算法

在本节中, 我们提出了一种多阶段算法. 该算法是建立在 Vandermonde 矩阵  $\Phi$  和  $\Psi$  的旋转不变性质基础上的, 即

$$\bar{\Phi} = \Phi F_1, \quad \bar{\Psi} = \Psi F_2, \quad (4)$$

其中  $F_1 = \text{diag}[\exp(j2\pi f_{11}), \dots, \exp(j2\pi f_{1K})]$  和  $F_2 = \text{diag}[\exp(j2\pi f_{21}), \dots, \exp(j2\pi f_{2K})]$  为对角矩阵. 矩阵  $\bar{\Phi}$  和  $\bar{\Psi}$  分别为矩阵  $\Phi$  删掉其第一行和最后一行.

未受噪声污染的数据矩阵  $X$  的 4 个子矩阵满足下面的关系式<sup>[3]</sup> (这里使用了 MATLAB 中的记号):

$$X(1) = X(1:M-1, 1:N-1) = \Phi A \Psi^T \triangleq \Phi \Lambda(1) \Psi^T$$

二维零均值, 方差为  $\sigma^2$  的复 Gauss 白噪声.

利用矩阵表示, 未受噪声污染的数据矩阵可以表示为

$$X = \Phi A \Psi^T, \quad (3)$$

其中

$$X(2) = X(1:M-1, 2:N) = \Phi A \bar{\Psi}^T = \Phi (A F_2) \Psi^T \triangleq \Phi \Lambda(2) \Psi^T$$

$$X(3) = X(2:M, 1:N-1) = \bar{\Phi} A \Psi^T = \Phi (F_1 A) \Psi^T \triangleq \Phi \Lambda(3) \Psi^T$$

$$X(4) = X(2:M, 2:N) = \bar{\Phi} A \bar{\Psi}^T = \Phi (F_1 A F_2) \Psi^T \triangleq \Phi \Lambda(4) \Psi^T, \quad (5)$$

由上面的关系式可知, 若得到矩阵  $\Phi$  和  $\Psi$  的估计, 则很容易由矩阵的 Vandermonde 结构得到二维频率的估计值. (5) 式中的子矩阵都是 Vandermonde 矩阵  $\Phi$  和  $\Psi^T$  的乘积, 不同之处在于它们的矩阵分解形式的中间部分为不同的对角矩阵. 与文献[9]不同, 这里的矩阵  $\Phi$  和  $\Psi$  通常是不同的, 而文献[9]中是同一个矩阵使得一组特征矩阵同时被对角化. 因此, 这里的对角结构可以看作是文献[9]中的对角结构的推广形式. 下面, 我们发展一种多阶段算法来估计 Vandermonde 矩阵  $\Phi$  和  $\Psi$ . 首先, 引入矩阵的双正交性.

矩阵的双正交性<sup>[9]</sup>: 对于矩阵  $B = [b_1, \dots, b_n] \in \mathbb{C}^{m \times n} (m \geq n)$ , 它的 Moore-Penrose 伪逆是  $B^\dagger = [b_1^\dagger, \dots, b_n^\dagger]^H \in \mathbb{C}^{n \times m}$ . 显然有如下的双正交关系,

$$(b_i^\dagger)^H b_j = b_j^H b_i^\dagger = \delta(i-j), \quad (6a)$$

即

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i &\perp \text{span}[\mathbf{b}_1^+, \dots, \mathbf{b}_{i-1}^+, \mathbf{b}_{i+1}^+, \dots, \mathbf{b}_n^+] \\ \mathbf{b}_i^+ &\perp \text{span}[\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_{i+1}, \dots, \mathbf{b}_n], \end{aligned} \quad (6b)$$

其中  $\mathbf{b}_j^+$  称为  $\mathbf{b}_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) 的伴随矢量. 双正交性在建立代价函数和计算单个分量的过程中有十分重要的作用.

### 2.1 降维处理

为了降低计算量,需要降低矩阵的维数. 理想的降维矩阵  $L$  和  $R$  应满足条件  $\text{span}(L) = \text{span}(\Phi)$  和  $\text{span}(R) = \text{span}(\Psi^*)$ , 其中上标 \* 表示复共轭. 从而, 矩阵  $L^H \Phi$  和  $R^H \Psi^*$  为满秩矩阵. 进一步, 为了处理方便,  $L$  和  $R$  最好是酉矩阵. 在没有噪声或无限样本情况下, 降维矩阵可以由矩阵  $X(1)$  的主左和右奇异向量得到 (也见文献 [3]). 实际上, 由于样本数有限, 难以得到高精度的降维矩阵, 这时可以从多个矩阵  $X(\tau)$ ,  $\tau = 1, \dots, 4$  中得到较高精度的降维矩阵. 令  $C = \sum_{\tau=1}^4 X(\tau)$ , 其奇异值分解 (SVD) 为  $C = UDV^H$ , 其中  $U = [u_1, \dots, u_{M-1}]$  和  $V = [v_1, \dots, v_{N-1}]$ . 因此, 降维矩阵取为矩阵  $C$  的主左和右奇异向量, 即  $L = [u_1, \dots, u_K]$  和  $R = [v_1, \dots, v_K]$ . 对于矩阵  $X(\tau)$ , ( $\tau = 1, \dots, 4$ ), 左乘  $L^H$  并且右乘  $R$  使得其维数由  $(M-1) \times (N-1)$  降到  $K \times K$ , 从而得到下面的变换矩阵,

$$E(\tau) = L^H X(\tau) R, \quad \tau = 1, 2, 3, 4. \quad (7)$$

注意, 在 (7) 式中, 噪声已被抑制, 而信号完全保留. 这是因为未受噪声污染的数据矩阵具有低秩结构, 而最小二乘意义上的最佳秩  $K$  近似<sup>[10]</sup> 可以保留信号分量的低秩性质同时滤除掉噪声分量.

### 2.2 代价函数

令  $G \triangleq L^H \Phi$  和  $H \triangleq R^H \Psi^*$ , 则 (7) 式可以改写为

$$E(\tau) = G A(\tau) H^H \triangleq \sum_{i=1}^K \rho_i(\tau) \mathbf{g}_i \mathbf{h}_i^H, \quad \tau = 1, 2, 3, 4. \quad (8)$$

令  $\mathbf{g}_i^+$ ,  $\mathbf{h}_i^+$  分别为  $\mathbf{g}_i$ ,  $\mathbf{h}_i$  的伴随矢量, 则利用 (8) 式和双正交性可得

$$\begin{aligned} E(\tau) \mathbf{h}_i^+ &= \rho_i(\tau) \mathbf{g}_i, \\ (\mathbf{g}_i^+)^H E(\tau) &= \rho_i(\tau) \mathbf{h}_i^H, \quad i = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (9)$$

注 1: 在 (9) 式中, 对于固定的一列  $i$  ( $i=1, \dots, K$ ), 存在一个与  $\mathbf{g}_i$  有关的关系式:

$$E(1) \mathbf{h}_i^+ \parallel E(2) \mathbf{h}_i^+ \parallel E(3) \mathbf{h}_i^+ \parallel E(4) \mathbf{h}_i^+ \parallel \mathbf{g}_i, \quad (10)$$

和一个与  $\mathbf{h}_i$  有关的关系式:

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_i^+)^H E(1) \parallel (\mathbf{g}_i^+)^H E(2) \parallel (\mathbf{g}_i^+)^H E(3) \parallel \\ (\mathbf{g}_i^+)^H E(4) \parallel \mathbf{h}_i^H, \end{aligned} \quad (11)$$

其中记号  $\parallel$  表示两个向量平行. 并且对于相同的一列  $i$  ( $i=1, \dots, K$ ),  $E(\tau) \mathbf{h}_i^+$  和  $\mathbf{g}_i$  之间的比例系数为  $\rho_i(\tau)$ , 而  $(\mathbf{g}_i^+)^H E(\tau)$  和  $\mathbf{h}_i$  之间的比例系数也为  $\rho_i(\tau)$ .

因而, 我们构造下面的提取单个列矢量的代价函数:

$$\begin{aligned} \min J(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, c_2, c_3, c_4) &= \sum_{p=2}^4 \left\| E(p) \mathbf{w}_1 - c_p E(1) \mathbf{w}_1 \right\|^2 \\ &+ \sum_{p=2}^4 \left\| \mathbf{w}_2^H E(p) - c_p \mathbf{w}_2^H E(1) \right\|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

关于上面的代价函数, 有如下两个注释:

注 2: 令  $\mathbf{c} = (c_2, c_3, c_4)$ , 显然代价函数  $J(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{c})$  相对于  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_2$  和  $\mathbf{c}$  都是二次函数.

注 3: 若  $\mathbf{w}_1 = \mathbf{h}_i^+$ ,  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{g}_i^+$  ( $i=1, \dots, K$ ),  $c_p = \rho_i(p) / \rho_i(1)$ , ( $p=2, 3, 4$ ), 则代价函数  $J(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{c})$  达到其全局最小值 0. 这一结论可由 (9) 式直接得到. 因此, 通过求代价函数  $J(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{c})$  的最小值点, 我们可以得到  $G$  和  $H$  的一列对应的矢量.

### 2.3 计算单个频率分量

令  $\theta = (\mathbf{w}, \mathbf{c})$ , 其中  $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ . 基于文献 [11] 的循环最小化的思想 (实际上, 在更早的文献 [8, 9] 中的多阶段算法已经隐含地使用了这种思想), 最小化函数  $J(\mathbf{w}, \mathbf{c})$  有如下通用的迭代形式:

$$\begin{aligned} c(0) &= \text{初始值}, \\ \text{对 } k &= 1, 2, \dots \text{ 计算}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k) &= \arg \min_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}, \mathbf{c}(k-1)), \\ \mathbf{c}(k) &= \arg \min_{\mathbf{c}} J(\mathbf{w}(k), \mathbf{c}). \end{aligned} \quad (13)$$

特别地, 对于本文中的代价函数(12)式, 它可以改写成如下形式,

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{c}) &= \mathbf{w}_1^H \sum_{p=2}^4 [\mathbf{E}(p) - c_p \mathbf{E}(1)]^H \\ &\quad [\mathbf{E}(p) - c_p \mathbf{E}(1)] \mathbf{w}_1 + \\ &\quad \mathbf{w}_2^H \sum_{p=2}^4 [\mathbf{E}(p) - c_p \mathbf{E}(1)] [\mathbf{E}(p) - c_p \mathbf{E}(1)]^H \mathbf{w}_2. \end{aligned} \quad (14)$$

由上式易知, 固定  $\mathbf{c}$ ,  $J(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{c})$  是关于变量  $\mathbf{w}_1$  和  $\mathbf{w}_2$  的二次函数, 从而容易得到代价函数的最小值点. 即, 固定  $\mathbf{c}$ , 使得代价函数  $J(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{c})$  最小的矢量  $\mathbf{w}_1$  和  $\mathbf{w}_2$  分别为下面两个矩阵的最小特征矢量:

$$\mathbf{C}_1 = \sum_{p=2}^4 [\mathbf{E}(p) - c_p \mathbf{E}(1)]^H [\mathbf{E}(p) - c_p \mathbf{E}(1)], \quad (15a)$$

$$\mathbf{C}_2 = \sum_{p=2}^4 [\mathbf{E}(p) - c_p \mathbf{E}(1)] [\mathbf{E}(p) - c_p \mathbf{E}(1)]^H. \quad (15b)$$

另一方面, 固定  $\mathbf{w}$ , 代价函数  $J(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{c})$  关于矢量  $\mathbf{c}$  的偏导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{c})}{\partial c_p} &= -2\mathbf{w}_1^H \mathbf{E}^H(1) \mathbf{E}(p) \mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_1^H \mathbf{E}^H(1) \cdot \\ &\quad \mathbf{E}(1) \mathbf{w}_1 c_p - 2\mathbf{w}_2^H \mathbf{E}(p) \mathbf{E}^H(1) \mathbf{w}_2 + \\ &\quad 2\mathbf{w}_2^H \mathbf{E}(1) \mathbf{E}^H(1) \mathbf{w}_2 c_p, \end{aligned} \quad (16)$$

令  $\frac{\partial J(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{c})}{\partial c_p} = 0$ , 可以得到使得代价函数  $J(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{c})$  的矢量  $\mathbf{c}$  的第  $p$  个元素为

$$c_p = \frac{\mathbf{w}_1^H \mathbf{E}^H(1) \mathbf{E}(p) \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2^H \mathbf{E}(p) \mathbf{E}^H(1) \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_1^H \mathbf{E}^H(1) \mathbf{E}(1) \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2^H \mathbf{E}(1) \mathbf{E}^H(1) \mathbf{w}_2}, \quad p = 2, 3, 4. \quad (17)$$

因此, 基于循环最小化思想, 我们可以得到求解代价函数  $J(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{c})$  最小值点的迭代算法. 初

始值  $\mathbf{c}(0)$  随机选取为一个归一化矢量. 在第  $k$  步, 计算  $\mathbf{w}_1(k)$  和  $\mathbf{w}_2(k)$  使得代价函数最小. 对于  $k=1, 2, \dots$ , 有如下的迭代过程:

(1) 求单位模矢量  $\mathbf{w}_1(k)$  使得

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^H(k) \left\{ \sum_{p=2}^4 [\mathbf{E}(p) - c_p(k-1) \mathbf{E}(1)]^H \right. \\ \left. [\mathbf{E}(p) - c_p(k-1) \mathbf{E}(1)] \right\} \mathbf{w}_1(k) \end{aligned} \quad (18)$$

最小, 即  $\mathbf{w}_1(k)$  是如下矩阵的最小特征矢量,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1(k) = \sum_{p=2}^4 [\mathbf{E}(p) - c_p(k-1) \mathbf{E}(1)]^H \\ [\mathbf{E}(p) - c_p(k-1) \mathbf{E}(1)]; \end{aligned} \quad (19)$$

(2) 求单位模矢量  $\mathbf{w}_2(k)$  使得

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2^H(k) \left\{ \sum_{p=2}^4 [\mathbf{E}(p) - c_p(k-1) \mathbf{E}(1)] \right. \\ \left. [\mathbf{E}(p) - c_p(k-1) \mathbf{E}(1)]^H \right\} \mathbf{w}_2(k) \end{aligned} \quad (20)$$

最小, 即  $\mathbf{w}_2(k)$  是如下矩阵的最小特征矢量

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2(k) = \sum_{p=2}^4 [\mathbf{E}(p) - c_p(k-1) \mathbf{E}(1)] \\ [\mathbf{E}(p) - c_p(k-1) \mathbf{E}(1)]^H; \end{aligned} \quad (21)$$

(3) 更新矢量  $\mathbf{c}(k)$

$$c_i(k) = \frac{d_i(k) + f_i(k)}{r_1(k) + r_2(k)}, \quad i = 2, 3, 4, \quad (22a)$$

其中

$$\begin{aligned} r_1(k) &= \mathbf{w}_1^H(k) \mathbf{E}^H(1) \mathbf{E}(1) \mathbf{w}_1(k), \\ r_2(k) &= \mathbf{w}_2^H(k) \mathbf{E}(1) \mathbf{E}^H(1) \mathbf{w}_2(k), \\ d_i(k) &= \mathbf{w}_1^H(k) \mathbf{E}^H(1) \mathbf{E}(i) \mathbf{w}_1(k), \\ f_i(k) &= \mathbf{w}_2^H(k) \mathbf{E}(i) \mathbf{E}^H(1) \mathbf{w}_2(k); \end{aligned} \quad (22b)$$

(4) 重复上面的步骤, 直到  $\|\mathbf{w}_1(k) - \mathbf{w}_1(k-1)\| < \epsilon$  且  $\|\mathbf{w}_2(k) - \mathbf{w}_2(k-1)\| < \epsilon$  ( $\epsilon$  为容许误差, 本文取  $\epsilon = 10^{-6}$ ), 且令  $\mathbf{g}_0^+ = \mathbf{w}_2(k)$  和  $\mathbf{h}_0^+ = \mathbf{w}_1(k)$ .

关于上面的迭代算法, 我们有下面的全局收敛性引理.

引理(全局收敛性): 对于随机选择的初始值

$c(0)$ , 上述最小化代价函数  $J(w, c)$  的迭代算法是全局收敛的.

**证明:** 首先, 容易验证循环最小化的过程具有如下性质,

$$J(w, c(0)) \geq J(w(1), c(0)) \geq J(w(1), c(1)) \geq \dots \geq J(w(k-1), c(k-1)) \geq J(w(k), c(k-1)) \geq J(w(k), c(k)) \geq \dots,$$

即, 上述迭代算法的每一步迭代均使得代价函数下降. 另一方面, 代价函数  $J(w, c)$  的全局最小值是 0. 因此, 该迭代算法具有全局收敛性.

一旦得到  $g_0^+$  和  $h_0^+$ , 令矩阵

$$F_1 = \sum_{p=1}^4 [E(p)h_0^+][E(p)h_0^+]^H, \\ F_2 = \sum_{p=1}^4 [E^H(p)g_0^+][E^H(p)g_0^+]^H.$$

利用双正交性可知,  $g_0$  和  $h_0$  分别对应于矩阵  $F_1$  和  $F_2$  的最大特征矢量.

## 2.4 第一阶段分解

得到一系列矢量  $g_0, h_0$  及其伴随矢量  $g_0^+, h_0^+$  后, 可从  $E(\tau)$  中去掉分量  $\rho_0(\tau)g_0h_0^H$ , 即  $\tilde{E}(\tau) = E(\tau) - g_0[(g_0^+)^H E(\tau) h_0^+]h_0^H$ , 其中  $g_0^H g_0^+ = 1, h_0^H h_0^+ = 1$ . 此时, 矩阵  $\tilde{E}(\tau)$  不是满秩的, 它的秩为  $K-1$ . 为了增加下一阶段抽取单个频率分量的计算效率, 应将  $\tilde{E}(\tau)$  降维成  $(K-1) \times (K-1)$  矩阵, 这不仅能避免权矢量再次收敛到已得到的分量上且提高计算效率.

新的降维矩阵应该满足  $L_1 = \text{null}(g_0^+), R_1 = \text{null}(h_0^+)$ . 由与矢量  $h_0^+$  和  $g_0^+$  相关联的 Householder 变换矩阵可得到下面的降维矩阵:

$$L_1 = [0 \ I_{K-1}] - \tilde{g}_0^+(g_0^+ + e_1)^H / (1 + g_{01}^+) \in \mathbb{C}^{(K-1) \times K}, \quad (23a)$$

$$R_1 = [0 \ I_{K-1}] - \tilde{h}_0^+(h_0^+ + e_1)^H / (1 + h_{01}^+) \in \mathbb{C}^{(K-1) \times K}, \quad (23b)$$

其中  $I_{K-1}$  表示  $(K-1) \times (K-1)$  维单位矩阵,  $0$  是  $(K-1)$  维零矢量,  $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{K \times 1}$ . 若  $t_0^+ = [t_{01}^+, \dots, t_{0K}^+]^T$ , 则  $\tilde{t}_0^+ = [t_{02}^+, \dots, t_{0K}^+]^T$ . 容

易验证  $L_1 g_0^+ = 0$  且  $R_1 h_0^+ = 0$ , 则  $L_1$  张成  $g_0^+$  的正交补空间, 而  $R_1$  张成  $h_0^+$  的正交补空间. 这说明  $L_1$  和  $R_1$  是理想的、有效的降维矩阵. 于是, 新的降维特征阵为

$$E_1(\tau) = L_1 \tilde{E}(\tau) R_1^H \in \mathbb{C}^{(K-1) \times (K-1)}. \quad (24)$$

由此完成了第一阶段分解.

## 2.5 多阶段分解

新的  $(K-1)$  维分量可由  $E_1(\tau)$  得到, 除了维数由  $K$  降到  $(K-1)$  外, 求解过程完全与第一阶段相同. 因此, 分量  $g_1, h_1$  和它们的伴随矢量  $g_1^+, h_1^+$  可以利用上节方法从  $E_1(\tau)$  中得到. 分解过程直到第  $(K-2)$  步为止.

给定  $q(1 \leq q \leq K-2)$ , 用  $E_q(\tau)(\tau=1, \dots, 4)$  替代(18)~(22)式中的  $E(\tau)(\tau=1, \dots, 4)$ , 类似地可得到  $g_q$  和  $h_q$  的伴随矢量  $g_q^+$  和  $h_q^+$ , 从而得到  $g_q$  和  $h_q$ .

降维矩阵  $L_{q+1} = \text{null}(g_q^+), R_{q+1} = \text{null}(h_q^+)$ , 可以用类似于  $L_1$  和  $R_1$  的方法得到. 降维特征矩阵可由

$$E_{q+1}(\tau) = L_{q+1}[E_q(\tau) - g_q((g_q^+)^H E_q(\tau) h_q^+)h_q^H]R_{q+1}^H \quad (25)$$

递归计算, 如此重复直到  $q=K-2$ , 此时降维特征矩阵  $E_{K-2}(\tau)$  是  $2 \times 2$  复矩阵. 给定  $g_{K-2}, h_{K-2}$  和  $g_{K-2}^+, h_{K-2}^+$ , 位于  $\mathbb{C}^2$  中的最后一个分量可由下面的双正交关系式惟一确定,

$$g_{K-2}^+ \perp g_{K-1}, \quad g_{K-2} \perp g_{K-1}^+, \quad (26a)$$

$$h_{K-2}^+ \perp h_{K-1}, \quad h_{K-2} \perp h_{K-1}^+. \quad (26b)$$

至此完成了多阶段分解.

## 2.6 多阶段重构

分解过程导致连续降维特征矩阵  $E_q(\tau)$  和抽取单个分量及其伴随矢量. 分解完成后, 所有具有充分维数的分量可由以下过程重构:

令  $G_{K-2} = [g_{K-2} : g_{K-1}] \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ , 则  $G_{K-3} = [g_{K-3} : L_{K-2}^H G_{K-2}] \in \mathbb{C}^{3 \times 3}, \dots$ , 直到  $G = [g_0 : L_1^H G_1] \in \mathbb{C}^{K \times K}$  为止.

类似地, 令  $H_{K-2} = [h_{K-2} : h_{K-1}] \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ , 则

$H_{K-3} = [h_{K-3} : R_{K-2}^H H_{K-2}] \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ , ..., 直到  $H = [h_0 : R_1^H H_1] \in \mathbb{C}^{K \times K}$  为止.

因为  $L_q$  和  $R_q$  分别是由  $(K-q+1) \times (K-q+1)$  维 Householder 矩阵的最后  $(K-q)$  行组成,  $L_q^H G_q$  和  $R_q^H H_q$  可由矩阵与矢量相乘得到. 因此, 重构过程也是计算有效的.

最后, 易知  $\Phi = LG$ ,  $\Psi = (RH)^*$ . 然后利用矩阵  $\Phi$  和  $\Psi$  的 Vandermonde 结构可以得到二维频率的估计值. 值得指出的是, 在每一步迭代过程中, 我们得到  $G$  的一系列矢量和  $H$  的一系列对应的矢量. 因此, 本文所得到的二维频率是自动配对的. 将  $\Phi$  的第  $(i, j)$  个元素记为  $\phi_{i,j}$ ,  $\Psi$  的第  $(i, j)$  个元素记为  $\varphi_{i,j}$ , 则二维频率的估计公式如下:

$$f_{1,k} = \frac{1}{2\pi(M-2)} \sum_{i=1}^{M-2} \text{angle}(\phi_{i+1,k}) - \text{angle}(\phi_{i,k}),$$

$$k = 1, 2, \dots, K, \quad (27a)$$

$$f_{2,k} = \frac{1}{2\pi(N-2)} \sum_{i=1}^{N-2} \text{angle}(\varphi_{i+1,k}) - \text{angle}(\varphi_{i,k}),$$

$$k = 1, 2, \dots, K, \quad (27b)$$

其中  $\text{angle}(\cdot)$  表示取相位角.

### 3 计算机仿真实验

为了验证本文多阶段算法的有效性及其相对性能, 做了下面的仿真实验.

**实验 1** 实验参数取为  $M=20$ ,  $N=20$ ,  $K=4$ ,  $s_k=1(k=1, 2, \dots, K)$ ,  $(f_{11}, f_{21})=(0.1, 0.1)$ ,

$(f_{12}, f_{22})=(0.14, 0.14)$ ,  $(f_{13}, f_{23})=(0.18, 0.18)$ ,  $(f_{14}, f_{24})=(0.22, 0.22)$ . 注意, 它们的频率间隔为 0.04, 它小于 Fourier 分辨能力  $1/M$  ( $=0.05$ ), 这意味着经典的基于 FFT 的算法不能分辨这 4 个二维频率. 每一个复谐波信号的信噪比 (SNR) 均为 10 dB 时, 图 1 画出了 200 次独立试验的二维频率分布图, 表 1 则给出了 3 种算法的标准差和相应的 Cramer-Rao 下界 (CRB). 由图 1 和表 1 显然可以看出, 本文的多阶段算法要显著优于文献 [3] 的 ACMP 算法, 同时本文算法也略优于文献 [7] 的 2D-ESPRIT 算法.

表 1 3 种算法的标准差和 Cramer-Rao 下界 (CRB)

$(f_1, f_2)$	标准差 ( $\times 10^{-3}$ ) <sup>a)</sup>	CRB ( $\times 10^{-3}$ )
(0.10, 0.10)	(0.9168, 0.9001)	(0.3161, 0.3161)
	(1.0056, 1.2023)	
	(1.5642, 1.5473)	
(0.14, 0.14)	(1.3486, 1.2944)	(0.3220, 0.3220)
	(1.2780, 1.5904)	
	(2.3349, 2.1271)	
(0.18, 0.18)	(1.3774, 1.3197)	(0.3220, 0.3220)
	(1.1841, 1.5847)	
	(2.1600, 2.2702)	
(0.22, 0.22)	(0.7878, 0.8252)	(0.3161, 0.3161)
	(0.8353, 1.0520)	
	(1.4120, 1.4847)	

a) 其中标准差的第一行数据为多阶段算法的统计结果, 第二行为 2D-ESPRIT 算法的统计结果, 第三行为 ACMP 算法的统计结果

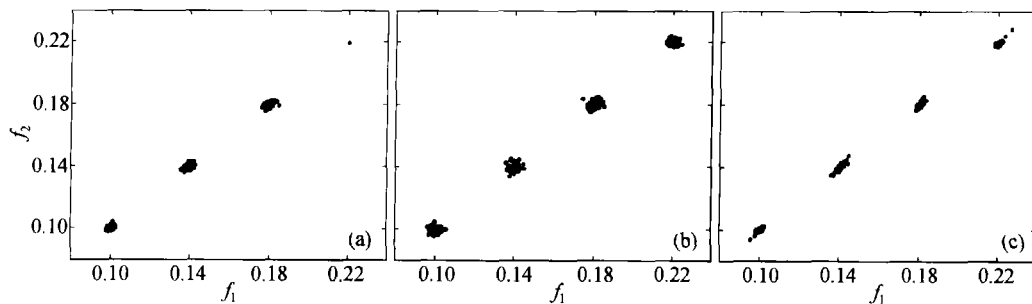


图 1 4 个二维频率的 200 次独立试验结果分布图 (SNR=10 dB)  
(a) 多阶段算法; (b) ACMP 算法; (c) 2D-ESPRIT 算法

**实验 2** 比较本文算法、ACMP 算法和 2D-ESPRIT 算法的均方误差 (MSE) 随信噪比 (SNR) 的变化情况. 取数据矩阵为  $15 \times 15$  维, 它包含

频率分别为  $(0.1, 0.1)$  和  $(0.2, 0.2)$  的两个复谐波信号. 对于每一个信噪比, 做 200 次独立实验. 图 2(a) 和 (b) 分别显示了频率  $(0.1, 0.1)$  和

频率(0.2, 0.2)的统计性能及其相应的CRB. 由图2可知, 对于信噪比在0到40 dB变化时, 本文多阶段算法的统计性能显著优越于ACMP

算法; 在较低信噪比情况下, 本文算法优于2D-ESPRIT算法, 随着信噪比的增加, 两种算法的统计性能趋于一致.

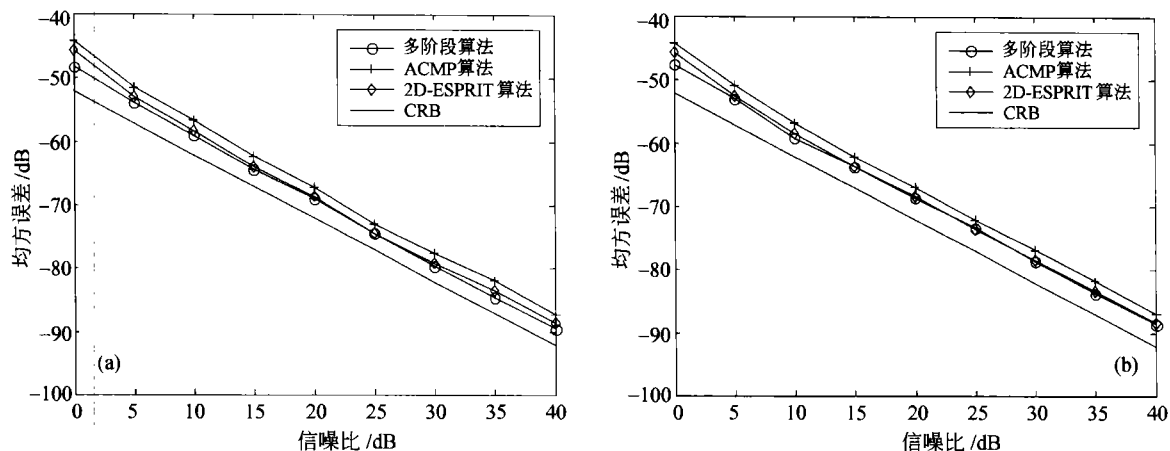


图2 3种算法的统计性能随信噪比的变化关系

(a) 第一个频率(0.1, 0.1)的统计性能; (b) 第二个频率(0.2, 0.2)的统计性能

由本节的仿真试验易见, 本文的多阶段算法在统计性能上要显著优于ACMP算法, 其原因可以做如下的解释: 第一, 本文算法充分利用了接收数据所包含的信息, 即本文算法利用了数据矩阵的所有4个子矩阵的信息, 而ACMP算法仅仅利用了其中的3个子矩阵的信息; 第二, 本文算法是一种参数联合估计方法, 它计算的是所有子矩阵的平均特征结构, 而ACMP算法是分维处理的, 这样本文算法具有更好的抑制噪声的能力.

### 参考文献

- 1 Clark M P, Scharf L L. Two-dimensional modal analysis based on maximum likelihood. *IEEE Trans Signal Processing*, 1994, 42(6): 1443—1451
- 2 Roy R, Kailath T. ESPRIT- estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Trans Acoustic Speech Signal Processing*, 1989, 37(4): 984—995
- 3 Vanpoucke F, Moonen M, Berthoumiou Y. An efficient subspace algorithm for 2-D harmonic retrieval. *Proc IEEE ICASSP*, Adelaide, Australia, 1994, 461—464

- 4 Rao D V B, Kung S Y. A state-space approach for the 2-D harmonic retrieval problem. *Proc IEEE ICASSP*, New York, 1984, 174—176
- 5 Hua Y. Estimating two-dimensional frequencies by matrix enhancement and matrix pencil. *IEEE Trans Signal Processing*, 1992, 40(9): 2267—2281
- 6 Sacchini J J, Steedly W M, Moses R L. Two-dimensional prony modeling and parameter estimation. *IEEE Trans Signal Processing*, 1993, 41(11): 3127—3136
- 7 Rouquette S, Najim M. Estimation of frequencies and damping factors by two-dimensional ESPRIT type methods. *IEEE Trans Signal Processing*, 2001, 49(1): 237—245
- 8 Feng D Z, Zhang X D, Bao Z. An efficient multistage decomposition approach for independent components. *Signal Processing*, 2003, 83(1): 181—197
- 9 冯大政, 保铮, 张贤达. 信号盲分离问题的多阶段分解算法. *自然科学进展*, 2002, 12(3): 324—328
- 10 Golub G H, Van Loan G F. *Matrix Computations*. 3rd ed. Baltimore: Johns Hopkins Univ Press, 1996, 76—86
- 11 Stoica P, Selen Y. Cyclic minimizers, majorization techniques, and the expectation-maximization Algorithm; A refresher. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2004, 21(1): 112—114